



گزینه ۳

۱

معادله مکان- زمان نوسانگر به صورت $x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ است. با توجه به نمودار $A = 0.05 \text{ m}$ است و مکان نوسانگر در $t = 0.02 \text{ s}$ برای اولین بار برابر 0.04 m شده است. بنابراین، دوره نوسان برابر است با:

$$x = 0.05 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \xrightarrow[t=0.02 \text{ s}]{x=0.04 \text{ m}} 0.04 = 0.05 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \times 0.02\right)$$

$$\Rightarrow 0.8 = \cos\left(\frac{2\pi}{T} \times 0.02\right) \Rightarrow \frac{2\pi}{T} \times 0.02 = \frac{\pi}{5} \Rightarrow T = 0.02 \text{ s}$$

حال با استفاده از رابطه $v_m = A\omega$ ، بیشینه تندی نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$v_m = A\omega = 0.05 \times \left(\frac{2\pi}{T}\right) = 0.05 \times \frac{2\pi}{0.02} = \frac{\pi}{2} \text{ m/s}$$

گزینه ۲

۲

حرکت تاب، آشناترین نمونه از یک حرکت نوسانی میراست. اگر تاب را از وضع تعادل، منحرف و سپس رها کنیم، دامنه نوسان تاب رفته‌رفته کاهش می‌یابد و پس از مدتی می‌ایستد. برای ادامه نوسان‌های تاب، باید یک نیروی دوره‌ای به آن وارد کرد که به این نیرو، "نیروی محرک" می‌گویند. در این شرایط، تاب با بسامدی برابر بسامد نیروی محرک به نوسان درمی‌آید. این نوع نوسان را "نوسان واداشته" می‌نامند. زمانی دامنه نوسان تاب بیشینه می‌شود که بسامد نیروی محرک (f) مساوی بسامد طبیعی تاب (f_0) باشد.

گزینه ۲

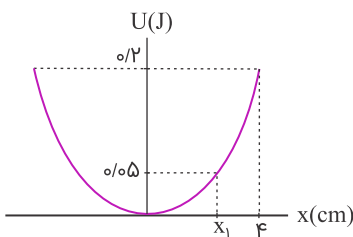
۳

باتوجه به نمودار بیشینه انرژی پتانسیل نوسانگر 0.2 J است. بنابراین طبق پایستگی انرژی مکانیکی، انرژی جنبشی نوسانگر در مکان x_1 برابر است با:

$$E = U + K \Rightarrow 0.2 = 0.05 + K \Rightarrow K = 0.15 \text{ J}$$

با استفاده از $K = \frac{1}{2}mv^2$ ، تندی نوسانگر در مکان x_1 برابر است با:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 0.15 = \frac{1}{2} \times \frac{75}{1000} \times v^2 \Rightarrow v = 2 \text{ m/s}$$



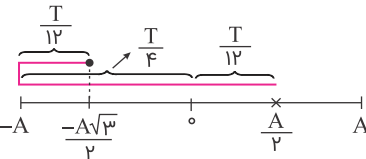
با توجه به نمودار، $\frac{T}{۴} = ۰/۱ s$ ، در نتیجه $T = ۰/۴ s$ است. بیشینه شتاب $۴ m/s^2$ است. طبق رابطه $a_m = A\omega^2$ ، دامنه نوسان برابر است با:

$$a_m = A\omega^2 \Rightarrow ۴ = A\left(\frac{۲\pi}{T}\right)^2 \Rightarrow ۴ = A\left(\frac{۲\pi}{۰/۴}\right)^2 \Rightarrow A = \frac{۲}{۱۲۵} m$$

در لحظه t_1 ، شتاب نوسانگر $-\frac{1}{۲}$ شتاب بیشینه و در لحظه t_2 ، شتاب نوسانگر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر شتاب بیشینه است. طبق رابطه $a = -\omega^2 x$ ، مکان نوسانگر در این دو لحظه را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a_1 = -۲ m/s^2 \Rightarrow \frac{a_1}{a_{max}} = \frac{-x_1}{A} \Rightarrow \frac{-۲}{۴} = \frac{-x_1}{\frac{۲}{125}} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{125} m \\ a_2 = +۲\sqrt{۳} m/s^2 \Rightarrow \frac{a_2}{a_{max}} = \frac{-x_2}{A} \Rightarrow \frac{۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{-x_2}{\frac{۲}{125}} \Rightarrow x_2 = \frac{-\sqrt{۳}}{125} m \end{cases}$$

مسیر حرکت نوسانگر در بازه (t_1, t_2) به صورت شکل زیر است. با توجه به مسیر، مدت زمان $(t_2 - t_1)$ برابر است با:



$$t_2 - t_1 = \frac{T}{12} + \frac{T}{4} + \frac{T}{12} = \frac{5T}{12} = \frac{1}{6} s$$

حالا تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{125} + \frac{2}{125} + \frac{1}{500}}{\frac{1}{6}} = ۰/۱۵۶ m/s = ۱۵۶ mm/s$$

طبق پایستگی انرژی، داریم:

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \xrightarrow{U_1=۰/۲ J, U_2=۰/۴ J, K_1=۳K_2} ۰/۲ + ۳K_2 = ۰/۴ + K_2 \Rightarrow K_2 = ۰/۱ J$$

حالا انرژی مکانیکی را به دست می‌آوریم:

$$E = U_2 + K_2 = ۰/۴ + ۰/۱ = ۰/۵۰ J$$

نموداری که تقعر آن رو به پایین است نمودار K و نمودار دیگر نمودار U است. با توجه به پایستگی انرژی $E = U + K$ است. برای هر دو مکان x_1 و x_2 می‌توان روابط زیر را نوشت:

$$x_1 : K_1 - U_1 = 0/5 \Rightarrow K_1 - (E - K_1) = 0/5 J \Rightarrow 2K_1 - E = 0/5 J$$

$$x_2 : K_2 - U_2 = 0/1 \Rightarrow K_2 - (E - K_2) = 0/1 \Rightarrow 2K_2 - E = 0/1 J$$

با استفاده از دو معادله به دست آمده، مقدار K_1 را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2K_1 - E = 0/5 \\ 2K_2 - E = 0/1 \end{cases} \Rightarrow 2K_1 - 2K_2 = 0/4 J \Rightarrow K_1 - K_2 = 0/2 J$$

با توجه به اطلاعات سؤال، $K_1 = \frac{3}{2}K_2$ است، پس:

$$\frac{3}{2}K_2 - K_2 = 0/2 J \Rightarrow K_2 = 0/4 J, K_1 = 0/6 J$$

با توجه به مکان x_1 و $K_1 = 0/6 J$ ، انرژی مکانیکی نوسانگر برابر است با:

$$K_1 - U_1 = 0/5 J \Rightarrow 0/6 - U_1 = 0/5 J \Rightarrow U_1 = 0/1 J$$

$$E = U + K = 0/6 + 0/1 = 0/7 J$$

با استفاده از $E = \frac{1}{2}mv_m^2$ ، بیشینه تندی نوسانگر را به دست می‌آوریم:

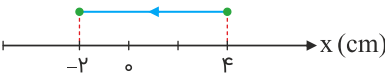
$$E = \frac{1}{2}mv_m^2 \Rightarrow 0/7 = \frac{1}{2} \times \frac{14}{1000} \times v_m^2 \Rightarrow v_m = 10 \text{ m/s}$$

برای این که دامنه نوسان آونگ بیشینه شود باید بین آونگ و نخ افقی تشدید رخ دهد. یعنی بسامد طبیعی آونگ با بسامد نخ افقی یکسان باشد.

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \Rightarrow 2\pi f = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \Rightarrow 2\pi \times 1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \Rightarrow \ell = \frac{g}{4\pi^2} = \frac{1}{4} \text{ m} = 25 \text{ cm}$$

باتوجه به هم طول بودن آونگ (۱) و (۴)، آونگ (۴) به تشدید درآمده و نسبت به بقیه آونگ‌ها با دامنه بیشتری نوسان می‌کند.

ابتدا باتوجه به نمودار دوره نوسان آونگ را حساب می‌کنیم:



$$\Delta t = \frac{T}{4} + \frac{T}{12} = \frac{T}{3} \Rightarrow 0.2 = \frac{T}{3} \Rightarrow T = 0.6 \text{ s}$$

حال با استفاده از رابطه $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ ، طول نخ آونگ را به دست می‌آوریم:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow 0.6 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{100}} \Rightarrow \ell = \frac{9}{100} \text{ m} = 9 \text{ cm}$$

باتوجه به یکسان بودن محیط، سرعت انتشار امواج یکسان است.

$$\begin{aligned} v_{\max} &= A\omega \Rightarrow \frac{v_{\max A}}{v_{\max B}} = \frac{A_A \omega_A}{A_B \omega_B} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} &= 1 \frac{\omega_A}{\omega_B} \xrightarrow{\omega = \frac{2\pi}{T}} \frac{T_B}{T_A} = \frac{1}{2} \\ \lambda &= vT \Rightarrow \frac{\lambda_B}{\lambda_A} = \frac{v_B T_B}{v_A T_A} \Rightarrow \frac{\lambda_B}{\lambda_A} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ابتدا دوره نوسان آونگ را به دست می‌آوریم. در هر نوسان، ۲ بار تندی نوسانگر صفر می‌شود. بنابراین در هر دقیقه نوسانگر $\frac{120}{2} = 60$ نوسان انجام می‌دهد.

$$T = \frac{\Delta t}{n} = \frac{60}{60} = 1 \text{ s}$$

طبق رابطه $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ ، شتاب گرانش در محل آونگ را به دست می‌آوریم:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow 1 = 2 \times 3 \times \sqrt{\frac{1}{g}} \Rightarrow g = 9 \text{ m/s}^2$$

$$E = K + U = ۱/۶ + ۰/۴ = ۲ \text{ J} \Rightarrow E = k_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$$

$$\Rightarrow ۲ = \frac{1}{2} \times ۰/۰۱ \times v_{\max}^2 \Rightarrow v_{\max} = ۲۰ \text{ m/s}$$

$$A = \text{طول پاره خط} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times ۴ = ۲$$

$$a_{\max} = A \omega^2 = \frac{A^2 \omega^2}{A} = \frac{v_{\max}^2}{A} = \frac{۲۰^2}{۲} = ۲۰۰ \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{\max}}{v_{\max}} = \frac{۲۰۰}{۲۰} = ۱۰$$

مجموع دو مسافت طی شده توسط نوسانگر، دو برابر دامنه نوسان است. بنابراین مجموع زمان‌های این دو حرکت برابر نصف دوره است.

نکته: در مدت $\frac{T}{2}$ نوسانگر مسافت $۲A$ را طی می‌کند.
پس دوره نوسان برابر $T = ۲(\Delta t_1 + \Delta t_2) = ۲(۰/۰۴ + ۰/۰۵) = ۰/۱۸ \text{ s}$ است.
بیشینه تندی نوسانگر از رابطه $v_{\max} = A\omega$ به دست می‌آید.

$$v_{\max} = A\omega = A \times \frac{2\pi}{T} = \frac{\lambda}{۱۰۰} \times \frac{۲\pi}{۰/۱۸} = \frac{\lambda}{۳} \text{ m/s}$$

تنها نیروی وارد بر نوسانگر، نیروی فنر است. کار نیروی فنر در یک جابه‌جایی، طبق قضیه کار و انرژی جنبشی برابر با تغییرات انرژی جنبشی وزنه است. با توجه به نمودار انرژی جنبشی (نمودار با تقرر رو به پایین) انرژی جنبشی در مکان x_1 برابر J ۱۰ و در مکان x_2 برابر است با:

$$K = E - U = ۲۰ - ۴ = ۱۶ \text{ J}$$

بنابراین کار نیروی فنر در این جابه‌جایی برابر است با:

$$W_e = K_{x_2} - K_{x_1} = ۱۶ - ۱۰ = ۶ \text{ J}$$

مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل نوسانگر مقداری ثابت و برابر انرژی مکانیکی نوسانگر است؛ پس:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \Rightarrow 6U_2 + 2 = U_2 + 12 \\ \Rightarrow 5U_2 = 10 \Rightarrow U_2 = 2 \text{ J}$$

بنابراین انرژی مکانیکی نوسانگر برابر است با:

$$E = U_2 + K_2 = 2 + 12 = 14 \text{ J}$$

انرژی مکانیکی نوسانگر از رابطه $E = \frac{1}{2}kA^2$ به دست می‌آید و بیشینه نیروی وارد بر نوسانگر $F_{\max} = kA$ است؛ پس:

$$E = \frac{1}{2}(kA)A = \frac{1}{2}F_{\max}A \Rightarrow 14 = \frac{1}{2} \times F_{\max} \times \frac{2}{100} \Rightarrow F_{\max} = 1400 \text{ N}$$